Формулы двойного и половинного угла

Формулы двойного угла — это формулы, выражающие тригонометрические функции угла 2α через тригонометрические функции угла α. Все формулы двойного угла выводятся из соответствующих формул сложения.

Синус двойного угла

Исходим из формулы синуса суммы:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Полагаем в этой формуле $\beta = \alpha$:

$$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha,$$

то есть

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.} \tag{1}$$

Мы получили формулу синуса двойного угла.

Косинус двойного угла

Исходим из формулы косинуса суммы:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Полагаем в этой формуле $\beta = \alpha$:

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha,$$

то есть

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.} \tag{2}$$

Это — первая формула косинуса двойного угла. Имеются ещё две. Они получаются из формулы (2) с помощью основного тригонометрического тождества.

Так, согласно основному тригонометрическому тождеству имеем: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. Подставляя это в (2), получим:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.} \tag{3}$$

С другой стороны, имеем также: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. Подставляем это в (2):

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.} \tag{4}$$

Как видите, в отличие от синуса двойного угла, где имеется одна-единственная формула, здесь нужно знать три формулы косинуса двойного угла (2)–(4).

Тангенс и котангенс двойного угла

Берём формулу тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,.$$

Полагаем в ней $\beta=\alpha$ и получаем формулу тангенса двойного угла:

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,.}\tag{5}$$

Точно так же из формулы котангенса суммы:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

получим:

$$\boxed{\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\,.}$$

Формулы понижения степени

Мы переходим к *формулам половинного угла*, которые связывают тригонометрические функции угла α и тригонометрические функции угла $\alpha/2$. По сути это те же формулы двойного угла, только записанные несколько иным образом.

По формуле (3) косинуса двойного угла имеем:

$$\cos\alpha=\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,,$$

откуда

$$\boxed{\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\,.}\tag{6}$$

А теперь точно так же воспользуемся формулой (4):

$$\cos\alpha=\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1,$$

откуда

$$\boxed{\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\,.}\tag{7}$$

Тождества (6) и (7) называются *формулами понижения степени*. Название понятно: в левой части каждой формулы стоит квадрат тригонометрической функции, а в правой части — первая степень косинуса.

Формулы тангенса половинного угла

Взяв отношение равенств (6) и (7), получим:

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\,.}$$

Данная формула, как видите, выражает квадрат тангенса половинного угла. Имеются также две формулы, выражающие сам тангенс.

Первая формула:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.}$$

Чтобы доказать это тождество, возьмём его правую часть и путём преобразований выведем из неё левую часть. Используем формулы (6) и (1).

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,.$$

Вторая формула:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\,.}$$

Докажите её самостоятельно, используя формулы (1) и (7).

Универсальная подстановка

Оказывается, любую тригонометрическую функцию угла α можно выразить через тангенс половинного угла $\alpha/2$.

1. Формула для синуса:

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\,.}\tag{8}$$

Доказываем «справа налево», умножая числитель и знаменатель дроби на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha.$$

2. Формула для косинуса:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\,.}\tag{9}$$

Попробуйте доказать её самостоятельно. Приём тот же: умножаем числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Но в данном случае вместо формулы синуса двойного угла вам понадобится формула (2) косинуса двойного угла.

3. Формула для тангенса — это уже известная нам формула (5):

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\,.}\tag{10}$$

4. Формула для котангенса — это «перевёрнутая» формула (10):

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,.}\tag{11}$$

Формулы (8)–(11) называются *универсальной подстановкой*.

Задачи

1. Вычислите:

а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$;

б) $\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$;

в) $4\sin 75^\circ \cos 75^\circ$;

г) $\dfrac{1}{2}\sin 105^\circ \cos 105^\circ$;

д) $\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^2$;

е) $\left(\sin\dfrac{7\pi}{8}-\cos\dfrac{7\pi}{8}\right)^2$.

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) 1; г) $-\frac{1}{8}$; д) $\frac{3}{2}$; е) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Вычислите:

а) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

б) $\sin^2\dfrac{\pi}{8}-\cos^2\dfrac{\pi}{8}$;

в) $2\cos^2 75^\circ - 1$;

г) $1-2\cos^2\dfrac{5\pi}{8}$;

д) $1-2\sin^2\dfrac{7\pi}{12}$;

е) $2\sin^2 165^\circ - 1$.

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$;

б) $\dfrac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

в) $\dfrac{1-\cos 2\beta}{\sin\beta}$;

г) $\dfrac{1+\cos 2\beta}{\cos\beta}$;

д) $\dfrac{\cos 40^\circ + \sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}$;

е) $\dfrac{\cos 10^\circ}{\cos 5^\circ + \sin 5^\circ} + \sin 5^\circ$.

а) $2\sin\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha$; в) $2\sin\beta$; г) $2\cos\beta$; д) 1; е) $\cos 5^\circ$

4. Упростите выражение:

а) $\sin 2\alpha + (\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;

б) $\sin 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha - 1$;

в) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{1-\cos\alpha}$;

г) $\dfrac{\cos 2x - \cos^2 x}{1-\cos^2 x}$;

д) $(\cos 3\alpha + \sin 3\alpha)(\cos 3\alpha - \sin 3\alpha)$;

е) $1-2\sin^2 4x$.

а) 1; б) $\cos 2\alpha$; в) $2\sin\alpha$; г) -1; д) $\cos 6\alpha$; е) $\cos 8x$

5. Известно, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найдите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

$\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$

6. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

$\sin 2\alpha = -\frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = \frac{119}{169}$

7. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $1/3$. Найдите косинус угла при вершине этого треугольника.

$\boxed{-\frac{7}{9}}$

8. Вычислите $\sin\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{\pi}{8}$.

$\boxed{\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

9. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2\operatorname{tg}3^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 3^\circ}$;

б) $\dfrac{6\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}$;

в) $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$;

г) $2\sin\dfrac{\pi+x}{2}\cos\dfrac{\pi+x}{2}$;

д) $(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$;

е) $\cos^2\dfrac{\pi+\alpha}{4}-\sin^2\dfrac{\pi+\alpha}{4}$.

$\boxed{\text{а) } \operatorname{tg}6^\circ;\ \text{б) } \sqrt{3};\ \text{в) } \sin\alpha;\ \text{г) } -\sin x;\ \text{д) } \cos 2\alpha;\ \text{е) } -\sin\frac{\alpha}{2}}$

10. Докажите тождество:

а) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$;

б) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha-\sin 2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\cos 2\alpha$;

г) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=2\operatorname{ctg}\alpha$;

д) $\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

е) $(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha=2\cos 2\alpha$;

ж) $(1+\cos 2\alpha)\operatorname{tg}\alpha=\sin 2\alpha$;

з) $\sin\alpha\cos^3\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$;

и) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-1$;

к) $\dfrac{\sin 2\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin^2\alpha}=-2\operatorname{ctg}\alpha$;

л) $\left(\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha=4\sin\alpha$;

м) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\sin 2\alpha=4\cos\alpha$;

н) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$;

о) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

11. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

$\boxed{-\frac{3}{4}}$

12. Докажите тождество:

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=2.$$

13. Докажите тождество:

а) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$;

б) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha$.

14. Выведите *формулы тройного угла*:

$$\text{а) } \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$
$$\text{б) } \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$
$$\text{в) } \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}\,.$$

15. Исходя из равенства $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$, вычислите $\sin 18^\circ$.

$\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

16. Покажите, что:

а) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{4}$; б) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = \dfrac{1}{8}$.